

基于 FDTD 算法的新型亚网格技术

任昊,王胜,谢国大,王丽华,吴先良,黄志祥

(安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室,安徽合肥 230039)

摘要: 提出了一种基于空间滤波(Spatial Filtering-Finite-Difference Time-Domain, SF-FDTD)算法的亚网格技术,使得 FDTD 算法的 Courant-Friedrich-Levy (CFL) 稳定性条件可通过空间频域滤波操作得以提高,从而获得高稳定性 FDTD 算法. 进一步将 SF-FDTD 算法应用到亚网格技术中,可使亚网格区域时间步长的选取与粗网格一致,从而极大地提高了计算效率. 数值计算结果表明,在求解带有精细结构的电磁问题上,所提算法具有较高的准确性和有效性.

关键词: 空间滤波; 时域有限差分算法; 亚网格技术; 稳定性条件

中图分类号: TN801 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)12-2944-05

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.12.016

A New Subgridding Technology Based on FDTD Algorithm

REN Hao, WANG Sheng, XIE Guo-dang, WANG Li-hua, WU Xian-liang, HUANG Zhi-xiang

(Key Laboratory of intelligent Computing & Signal Processing, Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China)

Abstract: A subgridding technique based on spatial filtering-Finite Difference Time Domain (SF-FDTD) method is proposed in this paper, the Courant-Friedrich-Levy (CFL) stability condition of the conventional FDTD algorithm can be improved by filtering operation in spatial frequency domain, thus obtaining a high stability FDTD method. The SF-FDTD algorithm is further applied to the subgridding technique, so that the time step of the subgridding region is the same as that of the coarse grid which greatly improved the computational efficiency. The numerical results show that the algorithm has high accuracy and validity in solving the electromagnetic problem with fine structure.

Key words: spatial filtering; FDTD method; subgridding technique; stability condition

1 引言

时域有限差分(FDTD)算法^[1,2]作为一种高效灵活的电磁计算工具,在计算电磁学的研究中起着重要的作用.传统的FDTD方法所能模拟的最小尺寸均不小于一个网格,对模拟的尺寸小于一个网格,若近似为一个网格,会给计算带来误差.以上计算误差可通过对计算区域进行精细剖分来减小,但这样处理会占用更多的内存.另外,基于FDTD算法的显示特性,其时间步长需满足CFL稳定性条件^[3-5],精细剖分也会使得时间步长的取值变小,增加了计算时间,因此,亚网格技术应运而生^[6,7],即在局部精细结构中采用细网格剖分,其他部分采用粗网格剖分,这样,在保证计算精度的同时也降低了计算所需内存.由于两种剖分区域的网格尺寸

不同,因此对应着不同的CFL条件.若粗细网格区域都取统一的时间步长,使其同时满足两种区域的CFL条件,这样在粗细网格区域边界只进行空间插值即可,但由于细网格的尺寸较小,为了满足细网格的CFL条件,统一的时间步长相对于粗网格的最大离散时间步长来说较小,导致总的计算时间较长.若在各自区域都选择其相对应的最大离散时间步长,则在粗细网格边界上即要进行空间插值又要进行时间插值^[8],这样处理会带来双重误差,同时也使得亚网格技术的应用变的十分复杂.为了提高计算效率和避免时间插值处理,一些学者提出在亚网格区域采用ADI-FDTD算法^[9-11]进行场值计算,由于ADI-FDTD算法不受CFL条件的限制,在亚网格区域可选取与粗网格区域一致的时间步长,避免了时间插值处理,提高了计算效率.但ADI-

收稿日期:2017-3-31;修稿日期:2017-6-26;责任编辑:梅志强

基金项目:国家自然科学基金(No. 61471001, No. 51277001, No. 61601166, No. 61701001, No. 61701003);安徽省自然科学基金(No. KJ2015A202);安徽高校自然科学研究重大项目(No. KJ2017ZD51, No. KJ2017ZD02);国家自然科学基金优秀青年基金(No. 61722101)

FDTD 算法迭代公式较为复杂,概念比较抽象,应用到亚网格技术中将会给编程带来很大的困难. 2010 年, Costas 提出了一种可扩展 CFL 稳定性条件的 SF-FDTD 算法^[12],在 FDTD 时域迭代中,将空间时域场值通过频域变换转换到空间频域,接着滤除因时间步长的扩展而变得异常活跃的高频分量,然后进行逆空间频域变换,最后达到稳定的状态. 这种方法不改变常规 FDTD 的迭代公式,在实际的编程中,只需在 FDTD 迭代中增加滤波操作即可. 本文的主要工作是将 SF-FDTD 方法应用到亚网格技术中,给出了 SF-FDTD 方法对亚网格区域场分量分布的要求及整个计算区域场值的迭代顺序,文中数值结果证明了 SF-FDTD 亚网格技术的准确性和有效性.

2 FDTD 中 CFL 稳定性条件扩展

常规 FDTD 方法的 CFL 条件可以从(1)式的色散关系式导出

$$\sin^2 \frac{\omega \Delta t}{2} = (c \Delta t)^2 \left(\frac{\sin^2 \frac{k_x \Delta x}{2}}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2 \frac{k_y \Delta y}{2}}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2 \frac{k_z \Delta z}{2}}{\Delta z^2} \right) \quad (1)$$

式中 c 为光速, $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 和 k_x, k_y, k_z 为各方向的网格尺寸和空间波数. 由式(1)知,上式右端值的上界为 1,假定式(1)右端正弦项取最大值 1,可以得到如下的关系式:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1/(\Delta x)^2 + 1/(\Delta y)^2 + 1/(\Delta z)^2} \cdot c} \quad (2)$$

式(2)即为三维 FDTD 的 CFL 稳定性条件. 式(1)右端正弦项可取最大值 1 表明: $k \Delta$ 可取 0 到奈奎斯特极限 π 之间的任意值. 由 FDTD 的数值色散条件(FDTD 区域最大网格尺寸至多为工作波长的十分之一)可知: 模拟信号的空间频谱的有用部分在 $k \Delta \leq 0.2\pi$ 范围内,其余的直到 π 的频谱范围被认为是色散误差而忽略不计,因此即使去除这部分分量,对 FDTD 计算结果的影响也可以忽略不计^[10]. 在常规的 FDTD 计算中,这些在 0.2π 以外的高频分量处于不活跃的状态,并且值几乎为零,但是当时间步长超过常规 FDTD 的最大离散时间步长时,这些高频分量将会变得异常活跃,数值不断增大,从而导致数值计算结果的发散. 通过以上分析可知,可通过滤除高频分量来获得更加宽松的 CFL 条件.

假定 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$,波数限制在一个以 k_{\max} 为球半径的波数范围内,即:

$$\begin{aligned} k_x &= k_{\max} \sin \theta \cos \phi \\ k_y &= k_{\max} \sin \theta \sin \phi \\ k_z &= k_{\max} \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

将式(3)代入式(1)右端可得:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta}{\sqrt{3} \cdot c \sin(k_{\max} \Delta / 2 \sqrt{3})} = \Delta t_s \times CE \quad (4)$$

式(4)中 Δt_s 为常规 FDTD 的 CFL 稳定性极限值,CE 表示 FDTD 的 CFL 可扩展的倍数,由公式可知 CE 是一个大于或等于 1 的值. 在二维 FDTD 中,可假定波数限制在一个以 k_{\max} 为圆半径的波数范围内,令 $k_x = k_{\max} \cos \phi$, $k_y = k_{\max} \sin \phi$,将其代入二维 FDTD 色散关系式中,得到 $CE = 1/\sin(k_{\max} \Delta / 2 \sqrt{2})$,因此对于 N ($N = 1, 2, 3$) 维 FDTD,CE 可用式(5)进行表示:

$$CE = 1/\sin(k_{\max} \Delta / 2 \sqrt{N}) \quad (5)$$

实现 CFL 条件扩展的实际过程是空间频域滤波,需要在每一次的 FDTD 迭代中执行. 首先将所有场分量从空间域变换到离散空间频域,然后应用低通滤波器,最后进行逆空间频域变换将所有场从离散空间频率变换到空间域. 为了完整性,下面提供对算法更正式的描述:

下面以二维 FDTD 为例,当扩展因子 CE 确定以后,根据式(5)求出 k_{\max} ,定义一个以 k_{\max} 为半径的圆形低通滤波器:

$$f(k) = \begin{cases} 1, & \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \leq k_{\max} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (6)$$

由于上述低通滤波器不能直接应用到空间域中,因此需要把场分量从空间域转换到空间频域中,具体的操作步骤如下:

(1) 将空间电磁分量进行频域变换:

$$E^n(k, n \Delta t) = F(E^n(r, n \Delta t)) \quad (7)$$

F 表示空间频域变换.

(2) 将式(6)的滤波函数与式(7)相乘积:

$$E^n(k^\beta, n \Delta t) = f(k) \otimes (E^n(k, n \Delta t)) \quad (8)$$

(3) 将频域下的 $E^n(k^\beta, n \Delta t)$ 进行逆变换转换到空间域:

$$E^n(r^\beta, n \Delta t) = F^{-1}(E^n(k^\beta, n \Delta t)) \quad (9)$$

F^{-1} 表示逆空间频域变换.

(4) 应用边界条件.

以上即为空间滤波算法在 FDTD 中的具体操作步骤,需要注意的是空间频域变换会“抹去”FDTD 算法的边界条件,因此在每一次的滤波操作以后都需要重新加载边界条件. 在 FDTD 中加上以上滤波步骤即可扩展 FDTD 的 CFL 条件,从而提高 FDTD 的计算效率.

3 SF-FDTD 亚网格技术

在应用亚网格技术时,最重要的内容是粗细网格边界上场值的交换方式以及粗细网格中场分量的分布. 本文以二维 TM 波为例(H_x, H_y, E_z) 进行介绍,粗细

网格中场分量的分布和电磁交换方式分别如图 1 和图 2 所示,粗细网格尺寸比为 3:1,其他奇数比也是可行的.在图 1 中,磁场位于网格的边缘,电场位于网格的中心,黑色圆点表示粗网格电场值,灰色圆点代表细网格电场值,带有黑色圆环的灰色圆点是粗细网格电场值重叠的部分.图中红色箭头表示粗网格磁值,灰色箭头表示需要进行插值计算的细网格磁值.在计算区域进行电磁计算时,在两种网格的边界处,细网格中场值更新需要的部分数据是缺失的,由于无法从粗网格上直接获得,这时需要用数据插值的方法来获得.本文选择这种电磁场分布是因为它可以更好地与 SF-FDTD 算法进行结合.由于电场和磁场的对偶性和相互性,若电场(磁场)分量保持稳定,则相对的磁场(电场)分量也保持稳定,因此可以只对电场或者磁场进行滤波操作,这样比对所有电磁分量进行滤波处理节约更多的时间,本文选择只对电场进行滤波.一般情况下,边界条件在频域中对应高频分量,滤波操作会滤出这些高频分量,这样会降低 SF-FDTD 算法的计算精度.本文中电场都处于细网格中心,所有的电场分量都可以通过细网格区域的时域迭代公式求出,不需要进行插值运算,因此对频域下的电场分量进行滤波时不会受到粗细网格边界的影响.

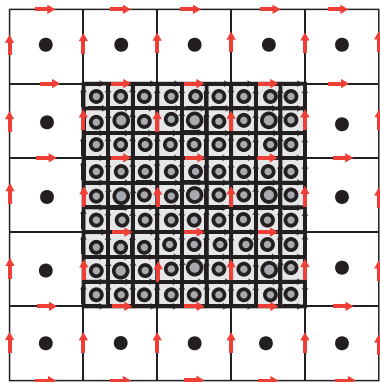


图1 粗细网格场值分布情况

采用如图 2 所示的电磁交换方式时,在粗细网格边界上,将粗网格上的磁场值 H_x, H_y 赋予相同位置上的细网格 h_x, h_y . 图 2 所示的橙色箭头所表示的细网格磁场分量为亚网格区域中电磁计算需要用到的磁场值,这些磁场分量可以通过插值计算得到.本文采用简单的线性插值技术,如图 3 所示,以 x 方向磁场为例,根据插值点与粗网格区域磁场值的空间距离来确定插值系数,则 h_1 和 h_2 可以通过式(10)和(11)得到:

$$h_1 = \frac{2}{3} \times H_2 + \frac{1}{3} \times H_5 \quad (10)$$

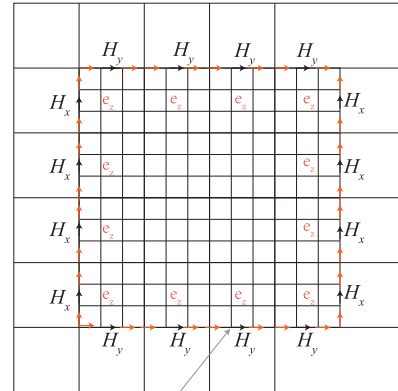


图2 电磁交换方式

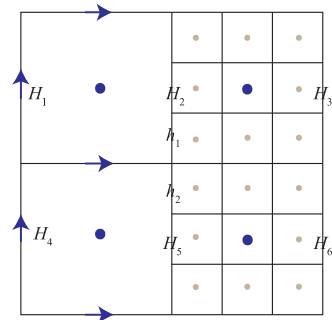


图3 场值线性插值示意图

$$h_2 = \frac{1}{3} \times H_2 + \frac{2}{3} \times H_5 \quad (11)$$

为了更好地说明这种场值的更新顺序和交换方式,下面通过流程图来给出整个计算区域电磁场分量的详细计算过程.

4 数值算例

为了验证上述 SF-FDTD 亚网格技术的正确性和有效性,下面通过两个数值算例来进行验证.

算例 1 仿真模型如图 5 所示,计算区域的网格尺寸 $\Delta x = \Delta y = 0.015\text{m}$,为工作波长的十分之一,总的计算空间大小为 $1.2 \times 1.2\text{m}$.在计算区域的右下角,将大小为 $0.3 \times 0.3\text{m}$ 的计算区域用细网格剖分,细网格的网格尺寸为 $\Delta x = \Delta y = 0.005\text{m}$,粗网格和细网格区域的时间步长 Δt 都取粗网格区域的最大离散时间步长.源被放置在计算区域的中心,其时域形式为 $\text{source}(t) = e^{-(t-t_0/T_w)^2}$,其中 $T_w = 0.32\text{ns}$, $t_0 = 4T_w$.计算区域四周被 CPML 包围,CPML 的厚度为 10 层,CPML 中的参数: $m = 3, \alpha_{\max} = 0.01, k_{\max} = 1$,观察点 A 和 B 分别置于亚网格区域内和区域外.

图 6 显示了分别采用均匀粗网格,均匀细网格,SF-FDTD 亚网格技术得到观察点的电场 E_z 的时域波形.可以看到采用 SF-FDTD 亚网格技术与采用均匀细网格所

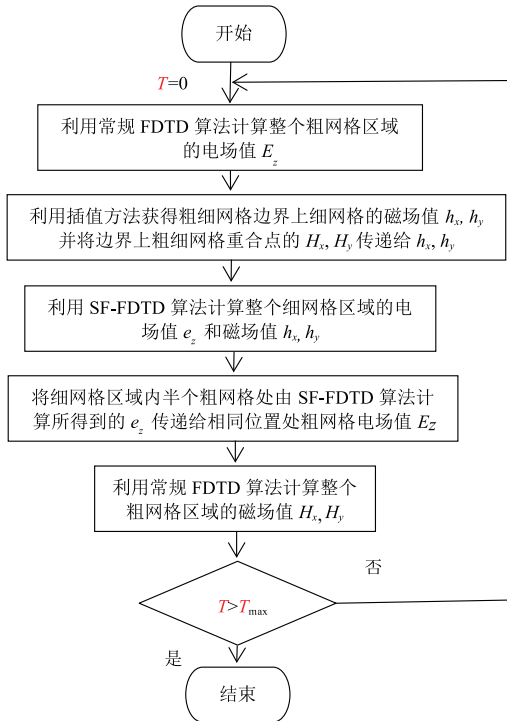


图4 SF-FDTD亚网格技术中场值计算流程图

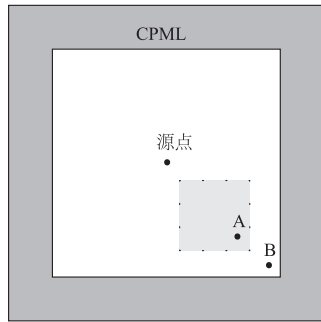


图5 显示了分别采用均匀粗网格, 均匀细网

得结果吻合的更好, 采用粗网格所得结果与以上两种结果有所偏差, 验证了 SF-FDTD 亚网格技术的准确性.

算例 2 如图 7 所示的二维带缝金属波导模型, 计算区域中的实线表示电壁, 壁中缝的宽度为 0.27m. 缝的周围用细网格进行剖分, 细网格的尺寸为 0.003m, 细网格区域大小为 0.36m × 0.36m, 其他区域用粗网格进行剖分, 粗网格的网格大小 0.009m, 为工作波长的十分之一, 粗网格和和细网格区域的时间步长 Δt 都取粗网格区域的最大离散时间步长. 该模型的上下两边为周期边界, 左右两端用 CPML 进行截断. 在该波导模型的左端靠近 CPML 的位置设置平面波源, 波源形式与算例 1 相同, 其中 $T_w = 0.19\text{ns}$, $t_0 = 4T_w$, 观察点 A 和 B 分别置于亚网格区域内和区域外.

图 8 给出了三种网格剖分方式在观察点处电场 E_z 的时域波形. 采用 SF-FDTD 亚网格技术与采用均匀细

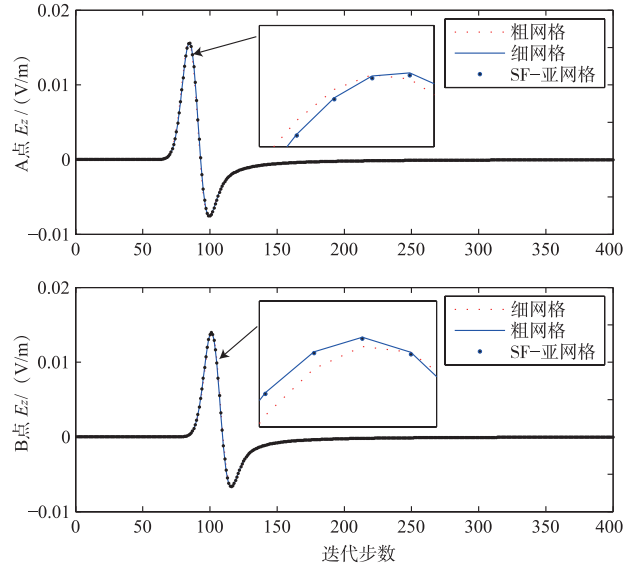


图6 三种方法计算观察点处电场 E_z 的时域波形

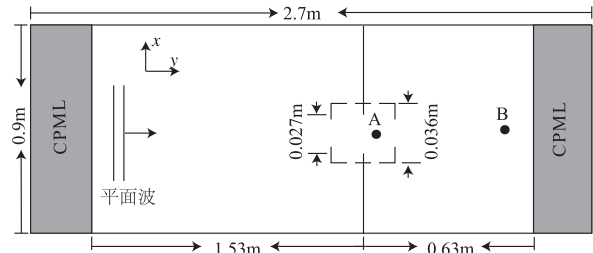


图7 二维带缝金属波导模型

网格计算所得结果吻合的更好, 采用粗网格所得结果与以上两种结果有所偏差, 再次验证了 SF-FDTD 亚网格技术的准确性 (本文所采用的算例在长时间的时域迭代中仍能够得到准确稳定的数值结果).

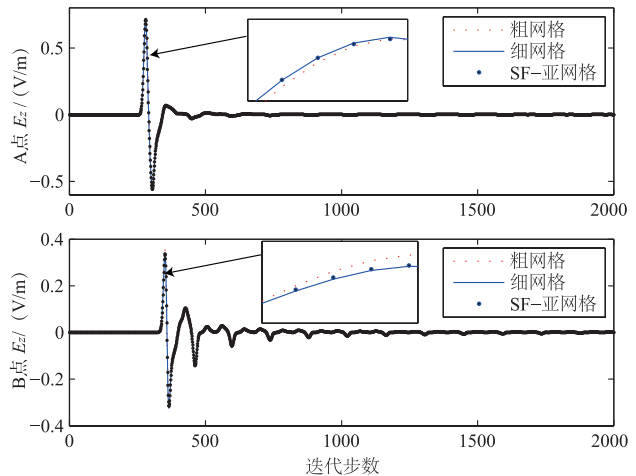


图8 三种方法计算观察点处电场 E_z 的时域波形

表 1 给出了三种网格剖分方式的运行时间和内存占用情况, 从表中可以看出, SF-FDTD 亚网格技术的计算效率和内存占用情况与均匀剖分的细网格 FDTD 相

比优势十分明显,与均匀剖分的粗网格 FDTD 相比,其计算效率和内存占用差距并不是很大。(计算环境为 Intel(R) Core(TM) i7-4790 CPU@3.60GHz 台式机)

表 1 三种剖分方式运行时间和占用内存对比

计算方法	运行时间 (s)	内存需求 (Mb)	空间步长 (m)	时间步长 (ps)
FDTD 粗网格	4.012	0.882	0.009	21.019
FDTD 细网格	117.937	7.361	0.003	7.006
SF-FDTD 亚网格	7.312	1.321	0.009 (粗)	21.019
			0.003 (细)	21.019

5 结论

本文提出了基于 SF-FDTD 算法的二维亚网格技术,由于 SF-FDTD 算法可通过空间滤波来扩展 FDTD 方法的 CFL 稳定条件,将其与亚网格技术进行结合,从而使得亚网格区域的时间步长可取与粗网格一致的时间步长,从而提高了计算效率.在保证计算精度的前提下,SF-FDTD 亚网格技术明显减少了计算时间,降低了内存需求,在正确性和有效性方面达到了很好的平衡.

参考文献

- [1] K S Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media [J]. IEEE Transactions on Antennas and propagation, 1966, 14(3): 302 - 307.
- [2] 葛德彪, 闫玉波. 电磁波时域有限差分法 [M]. 2 版. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2005, .
- [3] A Taflove, S C Hagness. Computational Electrodynamics the Finite-Difference Time-Domain Method [M]. 3rd Ed. USA: Artech House, 2005.
- [4] 赵鑫泰, 马西奎. 一种求解 Maxwell 方程组的无条件稳定时域精细方法 [J]. 电子学报, 2006, 34(9): 1600 - 1604.
ZHAO Xin-Tai, XI-Kui Ma. An unconditionally stable precise integration time domain method for solving Maxwell's equations [J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(9): 1600 - 1604. (in Chinese)
- [5] 黄志祥, 吴先良. 辛算法的稳定性及数值色散分析 [J]. 电子学报, 2006, 34(3): 535 - 538.
HUANG Zhi-Xiang, WU Xian-liang. The stability and numerical dispersion of symplectic scheme [J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(3): 535 - 538. (in Chinese)
- [6] L Kulas, M Mrozowski. Reciprocity principle for stable subgridding in the finite difference time domain method [A]. The International Conference on "Computer as a Tool" [C]. Warsaw, Poland: IEEE, 2007. 106 - 111.
- [7] I S Kim, W J R. Hoefer. A local refinement algorithm for the time-domain finite-difference method using Maxwell's curl equations [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques, 1990, 38(6): 812 - 815.
- [8] K Xiao, D J Pommerenke, J L Drowniak. A three-dimensional FDTD subgridding method with separated spatial and temporal subgridding interfaces and related stability analysis [J]. IEEE Transactions on Antennas and propagation, 2007, 55(7): 1981 - 1990.
- [9] B Z Wang, Y J Wang, W H Yu, R Mittra. A hybrid 2-D ADI-FDTD scheme for modeling on-chip interconnects [J]. IEEE Transactions on Advanced Packaging, 2001, 24(4): 528 - 533.
- [10] 冯德山, 陈佳维, 吴奇. 混合 ADI-FDTD 亚网格技术在探底雷达频散煤质中的高效正演 [J]. 地球物理学报, 2014, 57(4): 1322 - 1334.
FENG De-Shan, CHEN Jia-Wei, WU Qi. A hybrid ADI-FDTD subgridding scheme for efficient GPR simulation of dispersion media [J]. Chinese Journal Of Geophysics-Chinese Edition, 2014, 57(4): 1322 - 1334. (in Chinese)
- [11] N Diamanti, A Giannopoulos. An investigation into the implementation of ADI-FDTD subgrids in FDTD GPR modeling [A]. The International Conference on "4th International Workshop on, Advanced Ground Penetrating Radar" [C]. IREA, Naples, ITALY: IEEE, 2007. 122 - 126.
- [12] C D Sarris. Extending the stability limit of the FDTD method with spatial filtering [J]. IEEE Microwave and Wireless Components Letters, 2011, 21(4): 176 - 178.

作者简介



任 昊 男, 1991 年出生于安徽亳州. 安徽大学电子信息工程学院硕士研究生, 研究方向计算电磁学, 太阳能电池.
E-mail: tenyren@gmail.com

黄志祥 (通信作者) 男, 1978 年出生于安徽宣城. 安徽大学电子信息工程学院教授, 研究方向计算电磁学、辛算法、纳米技术.
E-mail: zxhuang@ahu.edu.cn